Artículo 1
Curvas Cónicas

Lic. Fausto Mauricio Lagos Suárez
www.mauripides.blogspot.com

Resumen

A continuación se abordan las curvas cónicas a partir de sus definiciones, se construyen las ecuaciones que las representan dejando así una recopilación de las demostraciones y elaborando un compilado de los resultados que permiten estudiarlas directamente.

Se asumen como claras las definiciones básicas de la geometría, tales como, punto, recta y segmento, así como su ubicación sobre el plano coordenado, ya que estas definiciones se han estudiando previamente.

Se hace una compilación general de la geometría analítica plana que se aborda a partír de tres curvas básicas *Elipse, Parábola e Hipérbola* presentando los demás resultados como degeneraciones de estas tres curvas.

La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

tiene coeficiente $B \neq 0$ cuando existe una rotación de la curva generada, sin embargo el presente artículo centra su contenido en las cónicas no rotadas, es decir las generadas por la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

lo que viene a explicar la ausencia de coeficiente B en todas las ecuaciones que se mencionan en el documento. Una ampliación al caso rotado se tiene en el documento dedicado exclusivamente a este estudio y que se puede conseguir también bajo licencia creative commons con el título *"creación de un software para el estudio de cónicas rotadas"* documento generado como tésis de pregrado en la Licencitura en Matemáticas y Estadística, por el autor.

1. ELIPSE

DEFINICIÓN 1 Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los dos puntos fijos se llaman *focos*. Se han designado a los focos F_1 y F_2 respectivamente (Ver *Fig. 1*). La recta que contiene los focos, se denomina *eje focal*. Los puntos de intersección de la elipse con el eje focal se denominan *vértices* y se han designado a V_1 y V_2 para denotarlos respectivamente. El segmento que une los vértices se denomina *eje mayor*. El punto medio del eje mayor se llama *centro*. El segmento perpedicular al eje mayor, que une los puntos m_1 y m_2 se denomina *eje menor*. la recta que lo contiene se llama *eje normal*.

Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos $\overline{F_1P}$ y $\overline{F_2P}$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P. Se denominan *lados rectos* a los segmentos de recta perpendiculares al eje mayor que tienen punto medio cada uno de los focos y excentricidad a la razón, siempre menor que uno, $e = \frac{c}{a}$.

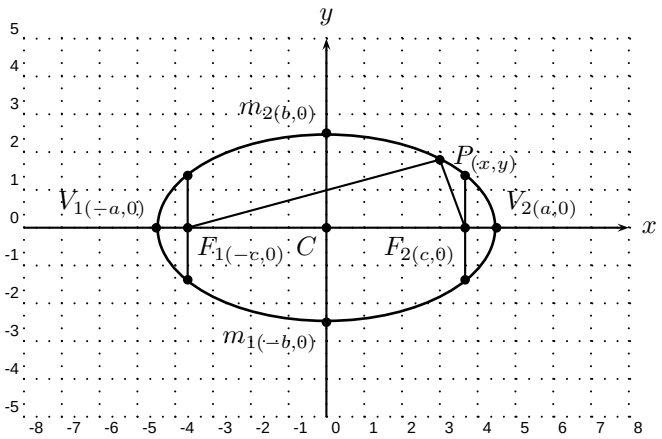

Fig. 1: Elipse de centro el origen y eje mayor horizontal.

1.1. Forma normal de la elipse

La forma normal de cualquiera de las secciones cónicas es una expresión factorizada de donde fácilmente se obtienen los puntos que describen la curva, es bueno recordar que un resumen claro del objetivo de la geometría analítica es *"dada una ecuación, hallar su gráfica y recíprocamente, dada su gráfica, hallar la ecuación que la representa"*. La anterior afirmación contiene los dos problemas fundamentales de la geometría analítica.

1.1.1. Centro el origen

Una elipse de centro el origen tiene dos formas de la ecuación normal, dependiendo de si se trata de una elipse con eje mayor sobre el eje de las abscisas o sobre el eje de las ordenadas. Para el caso de una elipse centrada en el origen con eje mayor sobre el eje de las abscisas su ecuación normal o canónica es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

en el segundo caso, una elipse centrada en el origen con eje mayor el eje de las ordenadas, la ecuación normal correspondiente es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \tag{4}$$

OBSERVACIÓN 1: La orientación del eje mayor de la elipse queda determinada por el denominador mayor, siendo siempre a el mayor de los dos denominadores y b el menor de éstos.

El siguiente teorema deja ver la generalización de estos resultados.

Teorema 1 *La ecuación normal de una elipse centrada en el origen tiene dos formas dependiendo de si su eje mayor se encuentra sobre el eje de las abscisas o sobre el eje de las ordenadas.*

(T1.1) Elipse con eje mayor horizontal *tiene centro* $(0,0)$*, coordenadas de los vértices* $(-a,0)$; $(a,0)$ *y longitud del eje mayor* $2a$*, coordenadas de los focos* $(-c,0)$ *y* $(c,0)$*, coordenadas de los menores* $(0,-b)$; $(0,b)$ *y longitud del eje menor* $2b$*, coordenadas de los extremos de los lados rectos* $\left(\mp c,\mp\frac{b^2}{a}\right)$ *y excentricidad* $e=\frac{c}{a}<1$*. Su ecuación correspondiente esta expresada en (3).*

(T1.2) Elipse con eje mayor vertical *tiene centro el origen, coordenadas de los vértices* $(0,-a)$; $(0,a)$*, coordenadas de los focos* $(0,-c)$ *y* $(0,c)$*, coordenadas de los menores* $(-b,0)$; $(b,0)$*, coordenadas de los extremos de los lados rectos* $\left(\mp\frac{b^2}{a},\mp c\right)$*, respecto a la longitud del eje mayor, la longitud del eje menor y la excentricidad, no hay cambio con respecto a la elipse de centro el origen y eje mayor horizontal. La ecuación (4) corresponde a esta elipse.*

DEMOSTRACIÓN DE T1.1

Utilizando la ecuación de la distancia en *Fig. 1*, los radios vectores de P estan dados por:

$$\overline{F_1P} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ y } \overline{F_2P} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

De la Definición 1

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a, \tag{5}$$

con a una constante mayor que c.

Resolviendo (5)

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2\left[x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right] \\
a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} &= x^2 + c^2 + y^2 \\
a^2 - c^2 &= \frac{x^2}{a^2}\left(a^2 - c^2\right) + y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Donde $b^2 = a^2 - c^2$ y dado que $a > c$ se garantizan las coordenas de los menores y los vértices.

Respecto a los lados rectos, las coordenadas de sus puntos extremos son $\left(\mp c, \mp\frac{b^2}{a}\right)$, esto se comprueba al resolver la ecuación (3) con $x = c$ dado que la abscisa de los extremos del lado recto es la misma abscisa de los focos.

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
y^2 &= \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - c^2\right) \\
y &= \mp\frac{b^2}{a}.
\end{aligned}$$

Respecto a la demostración de (*T1.2*), ver el ejercicio general número 26.

1.1.2. Centro C(h,k)

El otro caso que estudiar en la elipse esta dado cuando su centro es diferente del origen, de la misma forma que en el caso anterior se inicia abordando la elipse con eje mayor horizontal.

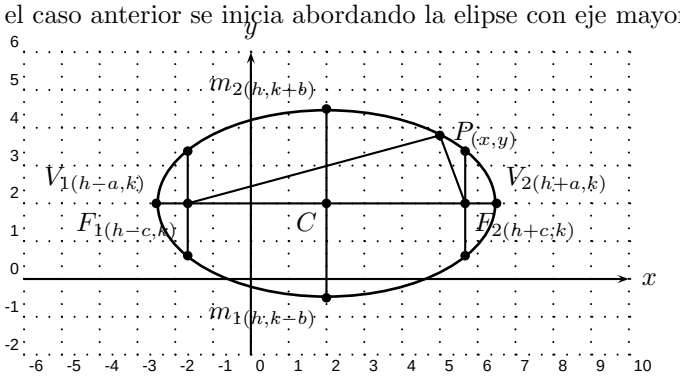

Fig. 2: Elipse con centro $C(h,k)$ y eje mayor horizontal.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN

Los radios vectores

$$\overline{F_1P}=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \text{ y } \overline{F_2P}=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

Aplicando la definición de elipse y resolviendo el álgebra

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

Por facilitar la escritura se hace $u=[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{u}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$
$$-2x(h-c)+(h-c)^2+2x(h+c)-(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{u}$$
$$4cx-4ch-4a^2=-4a\sqrt{u}$$
$$c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2u$$

Sustituyendo u y resolviendo los cuadrados

$$\frac{c^2(x-h)^2}{a^2}+a^2=x^2-2hx+h^2+c^2+y^2-2ky+k^2$$
$$\frac{c^2(x-h)^2}{a^2}+a^2=(x-h)^2+(y-k)^2+c^2$$
$$\frac{c^2(x-h)^2}{a^2}-(x-h)^2-(y-k)^2=c^2-a^2$$
$$\frac{(x-h)^2\left(c^2-a^2\right)}{a^2}-(y-k)^2=c^2-a^2$$

Multiplicando por -1 y haciendo $b^2=a^2-c^2$

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2}+(y-k)^2=b^2$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Los lados rectos de la elipse tienen puntos extremos en $\left(h\mp c,\mp\frac{b^2}{a}+k\right)$.

PRUEBA

Resolviendo (6) con $x=h\mp c$

$$\frac{[(h\mp c)-h]^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$(y-k)^2=b^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)$$
$$y=\mp\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}+k$$
$$y=\mp\frac{b^2}{a}+k.$$

El teorema dos expresa la generalización de este caso.

Teorema 2 *Una elipse con centro $C(h,k)$ tiene dos formas para su ecuación normal.*

(T2.1) Elipse con eje mayor horizontal *tiene centro en $C(h,k)$, coordenadas de los vértices $V(h\mp a,k)$ y longitud del eje mayor $2a$, coordenadas de los focos $F(h\mp c,k)$, coordenadas de los menores $m(h,k\mp b)$ y longitud del eje menor $2b$, coordenadas de los extremos de los lados rectos $\left(h\mp c,\mp\frac{b^2}{a}+k\right)$ y excentricidad $e=\frac{c}{a}<1$. La ecuación (6) representa esta elipse.*

(T2.2) Elipse con eje mayor vertical *tiene centro en $C(h,k)$, coordenadas de los vértices $V(h,k\mp a)$, las coordenadas de los focos $F(h,k\mp c)$, coordenadas de los menores $m(h\mp b,k)$, las coordenadas de los extremos de los lados rectos $\left(\mp\frac{b^2}{a}+h,k\mp c\right)$, finalmente la excentricidad esta dada por la razón $e=\frac{c}{b}<1$. La ecuación que representa a una elipse de centro $C(h,k)$ y eje mayor vertical es*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{7}$$

La demostración de la parte dos del segundo teorema se deja como ejercicio para el lector ya que se consigue siguiendo la secuencia utilizada en las anteriores demostraciones.

1.2. Forma general y degeneraciones de la elipse

La forma general de cualquier cónica no rotada presentada en (2) permite determinar de que cónica se trata a partir de sus coeficientes, esta es una manera más global de estudiar las cónicas ya que una sola expresión representa todos los resultados posibles mientras que la forma normal es específica en cada caso.

A continuación se presentan los procedimientos algebraicos utilizados para llegar de una forma a la otra y por tanto también se dejan ver los resultados generalizados, luego se muestra una clasificación de las degeneraciones de la elipse de acuerdo a las características de los coeficientes de su forma general para pasar a estudiar las especificaciones de los casos degenerados.

1.2.1. Obtención de la forma general a partir de la forma normal

La obtención de la forma general a partir de la forma normal en una elipse de centro el origen es inmediata al resolver la suma de fracciones en (3).

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

Tomando los coeficientes $A=b^2$, $C=a^2$ y $F=-a^2b^2$ se tiene la forma general para una elipse de centro el origen

$$Ax^2+Cy^2+F=0. \tag{8}$$

En general, el caso con centro $C(h,k)$ permite generalizar la obtención de la forma general de la elipse a partir de su forma normal.

De (6) se consigue la forma general al resolver la suma entre las fracciones y resolver los cuadrados

$$\begin{gathered}b^2(a-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2\\ b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2\end{gathered}$$

Igualando a cero se consiguen los coeficientes $A=b^2$, $C=a^2$, $D=-2b^2h, E=-2a^2k$ y $F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$, con lo cual se ve la forma general expresada en (2).

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Fácilmente puede verse que la ecuación (8) queda contenida en este resultado ya que para los coeficientes D, E y F; h y k son cero lo que reduce estos productos.

1.2.2. Obtención de la forma normal a partir de la forma general

Como ya se mencionón en el apartado anterior, el caso de la elipse centrada en el origen es ambigüo, por lo tanto se presenta solamente el caso de la elipse con centro $C(h,k)$.

Reorganizando (2)

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey + F = 0,$$

factorizando el coeficiente lider en cada variable y completando cuadrados

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2},$$

por último, para mejorar la escritura se hace $\Phi = \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$, con lo que se llega a

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\Phi C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\Phi A} = 1. \tag{9}$$

donde equivalentemente con lo que se tiene en (6), $h = -\frac{D}{2A}$, $k = -\frac{E}{2C}$, $a^2 = \Phi C$ y $b^2 = \Phi A$.

Especial interés se prestará a la constante Φ ya que de ella dependen las principales degeneraciones de la elipse.

OBSERVACIÓN 2: importante es ver que los resultados conseguidos en los numerales 1.2.1 y 1.2.2 son resultados generales, es decir aplican en cualquier caso y la simple sustitución evitaría el trabajo de realizar cálculos, sin embargo se recomienda que cada vez que sea necesario se realice el procedimiento completo para conseguir así destreza en el manejo de los elementos algebraicos que este proceso requiere.

1.2.3. Degeneraciones de la Elipse

El análisis que hasta ahora se ha hecho de la ecuación (2) esta centrado en el producto $AC > 0$ que corresponde a una *elipse*. Ahora se estudiarán las degeneraciones de (2).

DEFINICIÓN 2:
Circunferencia

Una *circunferencia* es un conjunto de puntos que equidistan de un punto interno fijo llamado *centro*. La distancia desde el centro a cualquier punto de la circunferencia se llama *radio* y la longitud del segmento que tiene punto medio el radio y extremos cualquier par de punto sobre la circunferencia se denomina *diámetro*.

Gráficamente la circunferencia se puede obtener como una degeneración de la elipse, ya que la circunferencia corresponde con una elipse en la que los focos estan ubicados sobre el centro con lo cual los radios vectores tienen igual longitud (radio).

A partir de la ecuación (2) y con la definición de circunferencia, se puede deducir la ecuación de cualquier circunferencia a partir de un sencillo análisis de (6) y (9).

Retomando (6)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Como ya se ha estudiado, los denominadores determinan las longitudes de los ejes mayor y menor respectivamente. De acuerdo a la definición de circunferencia, las longitudes de los ejes mayor y menor deben ser iguales (radio) por tanto $a^2 = b^2$, con lo cual (6) puede reescribirse como

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \tag{10}$$

Que corresponde a la ecuación normal de una circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r. Se adopta, por conveniencia, $r^2 = a^2 = b^2$.

A partir de ahora se hará referencia únicamente a la ecuación de la circunferencia con centro en $C(h,k)$ ya que el resultado de la circunferencia con centro en el origen es ambigüo al hacer $h = 0$ y $k = 0$.

En (1.2.1) se demostró que al obtener la ecuación general a partir de la forma normal, los coeficientes A y B corresponden a b^2 y c^2 respectivamente, con lo cual se llega a la conclusión siguiente:

CONCLUSIÓN 1: la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa:
(i) Una Elipse si $AC > 0$ con $A \neq C$.
(ii) Una circunferencia si $A = C$.

Al resolver los cuadrados en (10) para obtener la forma general de la circunferencia se comprueba que los coeficientes lider en ambas variables son uno ($A = C = 1$), por tanto, siempre que en (2) $A = C \neq 1$ deben reducirse estos coeficientes a uno (1) para poder llegar a la forma normal.

Por otro lado, respecto a la constante Φ mencionada en (9), se amplía la conclusión uno incluyendo otros dos resultados.

AMPLIACIÓN DE LA CONCLUSIÓN 1: la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa:
(i) Una Elipse si $AC > 0$ con $A \neq C$.
respecto a

$$\Phi = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$$

(ii) Una circunferencia si $A = C$ y $\Phi > 0$, correspondientemente $CD^2 + AE^2 > 4ACF$.
(iii) Un punto si $A = C$ y $\Phi = 0$, solamente cuando $CD^2 + AE^2 = 4ACF$.
(iv) Ningún punto si $\Phi < 0$, ó $CD^2 + AE^2 < 4ACF$.

Los resultados *(ii)* al *(iv)* de la conclusión 1 se especifícan en el siguiente teorema:

Teorema 3 *Una circunferencia con centro el punto $C(h, k)$ y radio r, tiene forma normal*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

forma general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

El análisis que se aplicó a (6) para obtener (10) sirve como demostración de la primera parte del Teorema 3.

La segunda parte del Teorema 3 puede demostrarse transformando la forma general en la forma normal, como sigue

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ x^2 + \frac{D}{2}x + \frac{D^2}{4} + y^2 + \frac{E}{2}y + \frac{E^2}{4} &= -F \\ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \end{aligned}$$

Que corresponde a:

i) Una circunferencia de centro $C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

ii) Un punto de coordenadas $C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$.

iii) Ningún punto siempre que $D^2 + E^2 < 4F$.

OBSERVACIÓN 3: Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uno de los resultados expuestos en el Teorema 3 siempre que $A = B$. Ahora, si $A = B \neq 1$ la recomendación es reducir estos coeficientes a uno (1), dividiendo toda la ecuación por el mismo valor para luego utilizar el método de completación de cuadrados para llegar a la forma normal.

Ejemplos A continuación se presenta una serie de ejercicios resueltos referentes al estudio de las ecuaciones de la elipse y sus degeneraciones.

(Ej-1) Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4,0)$ y $(-4,0)$ y cuyos focos son los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$.

Solución: Observando las coordenadas de los vértices y los focos, puede notarse que son puntos simétricos con respecto al eje de las ordenadas y dado que sus correspondientes ordenadas son cero, se tiene que se trata de una elipse de centro el origen y eje mayor horizontal.

Con lo cual, al aplicar el Teorema 2 se consigue la ecuación de la elipse.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

(Ej-2) Hallar la excentricidad y trazar la gráfica de la elipse cuya forma general esta dada por:

$$x^2+9y^2+6x-18y+9=0.$$

Solución: Para construir la gráfica de la elipse y determinar su excentricidad, se llevará a la forma normal de donde se consiguen inmediatamente las coordenadas de los puntos vértices, focos, centro etc. Siguiendo la completación de cuadrados

$$\begin{aligned} x^2+6x+9+9(y^2-2y+1)&=9\\ (x+3)^2+9(y-1)^2&=9\\ \frac{(x+3)^2}{9}+(y-1)^2&=1. \end{aligned}$$

Con esto la excentricidad corresponde a $e=\frac{\sqrt{8}}{3}$. Para la gráfica se deducen las coordenadas del centro $C(-3,1)$, los vértices $V_1(-6,1)$ y $V_2(0,1)$, y los extremos del eje menor $m_1(-3,0)$ y $m_1(-3,2)$.

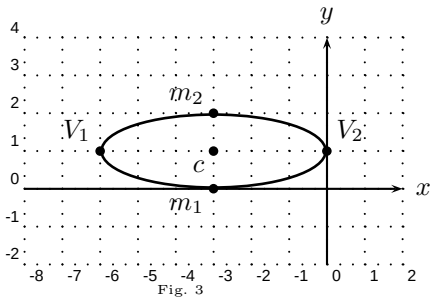

Fig. 3

(Eje-3) Determine si la ecuación corresponde a una circunferencia, un punto o ningún punto.

a) $x^2+y^2-2x+10y+19=0$

b) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

c) $x^2+y^2-10x+6y+36=0$

d) $4x^2+4y^2+24x-4y+1=0$

Solución: Haciendo uso de la constante Φ y los resultados mostrados en la conclusión 1 (ampliada), dado que los coeficientes A y C de las ecuaciones $a), b)$ y $c)$ son uno (1), la ecuación Φ se reduce a:

$$\Phi=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

con lo cual $a)$ corresponde a una circunferencia de centro $C(1,-5)$ y radio $r=\sqrt{7}$; $b)$, el punto de coordenadas $P(-1,2)$; $c)$ corresponde a ningún punto ya que el numerador de Φ es negativo, $\Phi=-2$ y en el caso de $d)$ se tiene que los coeficientes A y C son cuatro (4), con lo cual la constante Φ se toma completa como la menciona la conclusión 1, con lo cual $d)$ es una circunferencia de centro $C\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=3$.

Problemas 1 Las series de problemas presentados estan divididas en dos, la primera serie contiene *problemas generales* que estan pensados para desarrollar habilidad en la ejecución de procedimientos repetitivos, la segunda serie, de *problemas de profundización* esta diseñada como una serie de problemas más interesantes desde el punto de vista matemático.

Problemas Generales

En los ejercicios del 1 al 10, determine las coordenadas de los puntos notables (centro, focos, vértices y menores), las longitudes de los lados rectos y trace la curva mostrando todos sus puntos.

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$
2) $9x^2 + 25y^2 = 900$
3) $4y^2 + 25x^2 = 100$
4) $4x^2 + 9y^2 = 36$

5) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$
6) $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$
7) $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 9 = 0$
8) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$
9) $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$
10) $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

En los ejercicios 11 al 15 determine si la gráfica de la ecuación es una elipse, una circunferencia, un punto, o bien el conjunto vacío.

11) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
12) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$
13) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$
14) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$
15) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 117 = 0$

En los ejercicios 16 al 20, obtenga una ecuación de la elipse que tiene las propiedades que se indican y trace la gráfica respectiva.

16) Vértices en $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y un foco en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
17) Focos en $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y para la cual la constante $2a$ es $6\sqrt{3}$.
18) Vértices en $(0, 5)$ y $(0, -5)$ y pasa por el punto $\left(2, -\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$.
19) Centro en $(4, -2)$, vértice $(9, -2)$ y un foco en $(0, -2)$.
20) Focos en $(-1, -1)$ y $(-1, 7)$ y la longitud del semieje menor es de dos tercios de la longitud del semieje mayor.
21) Hallar la ecuación y trazar la gráfica de la circunferencia cuyo centro es el punto $(7, -6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.
22) Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación y su respectiva gráfica.
23) La ecuación de una circunferencia es $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4, 1)$ es exterior.
24) Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x-2y-24 = 0$ y $2x+7y+9 = 0$.
25) Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ en el punto $(-1, 6)$.
26) Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.
27) Presente una completa discución para demostrar (*T1.2*).

Problemas de Profundización 1

28) Demostrar que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son circunferencias concéntricas.
29) Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2+y^2-8x-10y+25 = 0$ son circunferencias tangentes.
30) Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$ no se cortan.

En los problemas del 30 al 32, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos dados y representar cada una gráficamente.

31) $(0, 0), (3, 6)$ y $(7, 0)$.
32) $(2, -2), (-1, 4), (4, 6)$.
33) $(4, -1), (0, -7), (-2, -3)$.
34) Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y cada lado recto.
35) Los focos de una elipse son los punto $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6.
36) El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

2. PARÁBOLA

DEFINICIÓN 3 Una parábola es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve en el plano y que conserva su distancia a una recta fija llamada *directriz* (d) y a un punto fijo llamado *foco* (F).

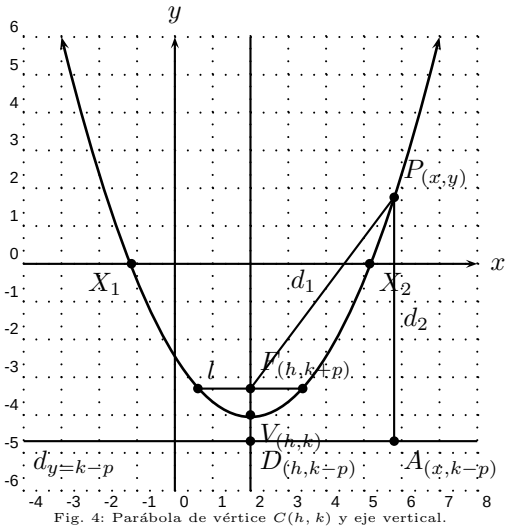

Fig. 4: Parábola de vértice $C(h,\,k)$ y eje vertical.

La recta perpendicular a la directriz, que pasa por el foco, se denomina *eje de la parábola*, el punto medio del segmento que va desde el punto de intersección del eje con la directriz (D) hasta el foco, se denomina *vértice* (V) y es el punto de inflexión mínimo o máximo de la curva.[1] La distancia entre el vértice y el foco es denotada p. El segmento de recta perpendicular al eje, que pasa por el foco y tiene extremos sobre la parábola, se denomina *lado recto* (l), su longitud equivale a cuatro veces la distancia del vértice al foco $(4p)$, finalmente las raices o ceros de la parábola están notados por X_1 y X_2 ó Y_1 y Y_2 según la elipse tenga eje vértical u horizontal. La figura (4) deja ver los detalles de una parábola con centro $C(h,k)$ y eje vertical.

2.1. Forma normal de la parábola

Como ya se había citado antes, las formas normal y general de cualquiera de las cónicas cuyo punto de referencia (bien el centro o el vértice) este sobre un punto fuera del origen (h,k) son una generalización para los casos en que este punto coincide con el origen, por tanto se tratan únicamente los casos de la parábola con vértice $V(h,k)$. La parábola puede tener eje paralelo a uno de los ejes coordenados (horizontal o vertical) o en el caso de una parábola rotada (caso que no se estudia en el presente documento), eje oblicuo. Para construir la forma normal de la ecuación de una parábola, se parte de la definición, inicialmente se trata de la parábola mostrada en la figura (4), vértice $V(h,k)$ y eje vertical.

De la definición (3)

$$d_1 = d_2$$

Aplicando la ecuación de la distancia y resolviendo

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-h)^2+[y-(k+p)]^2} &= \sqrt{[y-(k-p)]^2} \\
(x-h)^2+[y-(k+p)]^2 &= y^2-2y(k-p)+(k-p)^2 \\
(x-h)^2+y^2-2y(k+p)+(k+p)^2 &= y^2-2y(k-p)+(k-p)^2 \\
-2ky+2py+(k-p)^2 &= (x-h)^2-2ky-2py+(k+p)^2 \\
4py+k^2-2kp+p^2 &= (x-h)^2+k^2+2kp+p^2 \\
4py-4pk &= (x-h)^2
\end{aligned}$$

[1] Léase punto de inflexión al punto en el que el sentido de la concavidad de la curva cambia siempre que en ese punto haya una recta tangente a la curva.

Finalmente factorizando el lado izquierdo se obtiene

$$4p(y-k) = (x-h)^2. \tag{11}$$

La ecuación (11) permite tener fácilmente los puntos notables de la parábola mencionados en la definición (3), sin embargo para ver más fácilmente como llegar a las raices o ceros se tiene que éstos aparecen cuando $y = 0$, por tanto

$$4p(y-k) = (x-h)^2$$

que, siendo $y = 0$, se reduce a:

$$\begin{aligned} -4kp &= (x-h)^2 \\ h \mp \sqrt{-4kp} &= x \end{aligned}$$

Por comodidad haremos $\lambda = -4kp$ ya que volveremos sobre λ al estudiar la degeneraciones de la parábola. Respecto a las raices se tiene que:

a) Si $\lambda > 0$ existen dos raices reales diferentes,

b) si $\lambda = 0$ con $k = 0$, existen don raices reales iguales,

c) finalmente, si $\lambda < 0$ no exiten raices reales.

Teorema 4 *La forma normal de la ecuación de una parábola tiene dos representaciones de acuerdo a si su eje es vertical u horizontal.*

(T4.1) *Parábola con vértice $V(h,k)$ y eje vertical.*

La ecuación (11) representa esta parábola cuyo foco se encuentra en $F(h, k+p)$, los extremos del lado recto tienen coordenadas $(h \mp 2p, k+p)$, la directriz tiene ecuación $d : y = k-p$, de acuerdo a λ, existen dos raices diferentes en $\left(h \mp \sqrt{\lambda}, 0\right)$, dos raices iguales en $(h,0)$ o ninguna raíz real, finalmente la parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.

(T4.2) *Parábola con vértice $V(h,k)$ y eje horizontal.*

Esta parábola tiene ecuación

$$4p(x-h) = (y-k)^2. \tag{12}$$

el foco tiene coordenadas $F(h+p, k)$, los extremos de los lados rectos se encuentran en $(h+p, k \mp 2p)$ y su directriz tiene ecuación $d : x = h-p$, en este caso $\lambda = -4hp$ y define dos raices reales diferentes en $\left(0, k \mp \sqrt{\lambda}\right)$, dos raices iguales en $(0,k)$ o ninguna raíz real. Esta parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$.

La demostración de las coordenadas de los extremos de los lados rectos en ***T4.1*** se sigue de que el lado recto tiene ecuación $y = k + p$ con lo cual sus extremos tienen ordenada $k + p$, con eso y como estos puntos estan, por definición, sobre la parábola, haciendo una sustitución de y en (11) y despejando x se llega a la abscisa de los extremos del lado recto, como sigue

$$\begin{aligned} 4p(k+p-k) &= (x-h)^2 \\ 4p^2 &= (x-h)^2 \\ \pm 2p &= x-h \\ \pm 2p + h &= x. \end{aligned}$$

La segunda parte de la demostración del teorema 4 se deja como propuesta de ejercitación para el lector ya que se sigue del mismo razonamiento utilizado en la demostración de la primera parte.

2.2. Forma general y degeneraciones de la parábola

Para iniciar, es bueno recordar que la ecuación (2) se denomina *ecuación general* gracias a que es una única ecuación para expresar todas las curvas cónicas, a continuación se observan los detalles que hacen que esta ecuación represente una parábola.

2.2.1. Obtención de la forma general a partir de la forma normal de una parábola.

A partir de (11), se tiene

$$\begin{aligned} 4p(y-k) &= (x-h)^2 \\ 4py - 4kp &= x^2 - 2hx + h^2 \\ x^2 - 2hx - 4py + 4kp + h^2 &= 0, \end{aligned}$$

que puede expresarse como

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $D = -2h, E = -4p$ y $F = 4kp + h^2$. Aplicando igual análisis a (12)

$$\begin{aligned} 4p(x-h) &= (y-k)^2 \\ 4px - 4hp &= y^2 - 2ky + k^2 \\ y^2 - 4px - 2ky + 4hp + k^2 &= 0, \end{aligned}$$

que igualmente puede expresarse de manera general como

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $D = -4p, E = -2k$ y $F = 4hp + k^2$.

CONCLUSIÓN 2: la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa:
(i) Una parábola de eje vertical si $C = 0$,
(ii) Una parábola de eje horizontal si $A = 0$.

2.2.2. Obtención de la forma normal a partir de la forma general de la parábola

La conclusión (2) deja ver dos casos de la forma general de una parábola, la obtención, en cualquiera de los casos, de la forma normal se consigue completando el cuadrado en la variable de mayor orden en el polinomio, es decir si es una parábola de eje vertical se completará el cuadrado en x y análogamente, si es una parábola de eje horizontal se completará el cuadrado en y. A continuación se presenta el caso de la elipse con eje vertical.

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} &= \frac{D^2}{4A} - \frac{E}{A}y - \frac{F}{A} \\ \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= \frac{D^2 - 4AF - 4AEy}{4A^2} \\ \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A}\left(y + \frac{4AF - D^2}{4AE}\right). \end{aligned}$$

De manera similar para la parábola de eje horizontal

$$\begin{aligned} Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} &= -\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{D}{C}x \\ \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= \frac{E^2 - 4CF - 4CDx}{4C^2} \\ \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= -\frac{D}{C}\left(x + \frac{4CF - E^2}{4CD}\right). \end{aligned}$$

2.2.3. Degeneraciones de la parábola

La parábola se degenera en rectas paralelas, rectas coincidentes o ningún punto cuando además de los coeficientes A y C alguno de los coeficientes, D o E correspondientemente, también es cero.

En el caso en que una de las anteriormente nombradas parejas de coeficientes sea nula, la ecuación general de la parábola se reduce a un polinomio de grado dos en una variable (bien x o y) luego si en ese polinomio las raices son reales diferentes se tendrán dos rectas paralelas, si son raices reales iguales se tendrán rectas coincidentes y en caso de que sean raices complejas la ecuación no representa ningún punto.

Estos resultados se exponen más claramente en la siguiente ampliación de la conclusión (2.2.1).

AMPLIACIÓN DE LA CONCLUSIÓN 2: la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa:
(i) Una parábola de eje vertical si C=0,
si E es también cero

$$Ax^2 + Dx + F = 0$$

representa:
(ia) Dos rectas paralelas al eje y si sus raices son reales diferentes, estas rectas tendrán ecuaciones $x = r_1$ y $x = r_2$, siendo r_1 y r_2 las raices del polinomio $Ax^2 + Dx + F = 0$.
(ib) Rectas coincidentes siempre que r_1 y r_2 sean iguales.
(ic) Ningún punto si las raices del polinomio $Ax^2 + Dx + F = 0$ son complejas.

De manera análoga
(ii) Parábola de eje horizontal si A=0,
y siempre que D sea también cero

$$Cy^2 + Ey + F = 0$$

representa
(iia) Dos rectas paralelas al eje x si sus raices son reales diferentes, las ecuaciones correspondientes a estas rectas serán $y = r_1$ y $y = r_2$, con r_1 y r_2 las raices del polinomio $Cy^2 + Ey + F = 0$.
(iib) Rectas coincidentes siempre que r_1 y r_2 sean iguales.
(iic) Ningún punto si las raices del polinomio $Cy^2 + Ey + F = 0$ son complejas.

Una acotación importante respecto a las degeneraciones de la parábola recae en el λ utilizado para determinar los ceros de la parábola, ya que las ecuaciones de las rectas coinciden con los resustados generados por esta constante.

OBSERVACIÓN 4: La llamada fórmula cuadŕatica

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

permite encontrar las raices de un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
Respecto al discriminante $b^2 - 4ac$
(i) Si $b^2 - 4ac > 0$ las raices con reales diferentes.
(ii) Si $b^2 - 4ac = 0$ las raices son iguales.
(iii) Si $b^2 - 4ac < 0$ las raices son complejas.

Ejemplos

(Eje-4) Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

Solución: De acuerdo a las coordenadas del vértice y foco, la parábola tiene eje horizontal y abre hacia la derecha, utilizando la ecuación de la distancia puede determinarse el valor de la constante $p = 3$, con lo cual la ecuación normal y general de la parábola son, respectivamente

$$12(x + 4) = (y - 3)^2$$
$$y^2 + 12x + 6y + 39 = 0.$$

Finalmente la ecuación de la directriz es $x = -7$ y la ecuación del eje es $y = 3$.

(Eje-5) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0,0),(8,-4)$ y $(3,1)$.

Solución: El que el eje de la parábola sea paralejo al eje X deja ver que los puntos dados deben satisfacer la ecuación $Cy^2+Dx+Ey+F=0$, ahora como $C\neq 0$ toda la ecuación puede dividirse en C para reducir a 3 el número de variables a resolver con un sistema de igual número de ecuaciones.

$$y^2+\frac{D}{C}x+\frac{E}{C}y+\frac{F}{C}=0,$$

de tal forma que $D'=\frac{D}{C}, E'=\frac{E}{C}$ y $F'=\frac{F}{C}$, así

$$F'=0, \tag{A}$$
$$16+8D'-4E'+F'=0, \tag{B}$$
$$1+3D'+E'+F'=0. \tag{C}$$

Sustituyendo F' se reduce al sistema 2×2

$$8D'-4E'=-16, \tag{A'}$$
$$3D'+E'=-1, \tag{B'}$$

de (B'), $E'=-3D'-1$, que al sustituirse en (A') hace $D'=-1$, luego $E'=2$; entonces la ecuación general de la parábola es

$$y^2-x+2y=0,$$

y la respectiva ecuación normal es

$$(y+1)^2=x+1.$$

(Eje-6) Encuentre la ecuación de la parábola que tiene foco en $F(6,4)$ y directriz $y=-2$.

Solución: Por la ecuación de la directriz puede verse que la parábola mencionada tiene eje vertical así como de la distancia entre la directriz y el foco se deduce que el vértice tiene coordenadas $V(6,1)$ y por tanto la constante $p=3$, con esto se obtiene la ecuación normal de la parábola

$$(x-6)^2=12(y-1),$$

de donde se deduce la ecuación general

$$x^2-12x-12y+48=0.$$

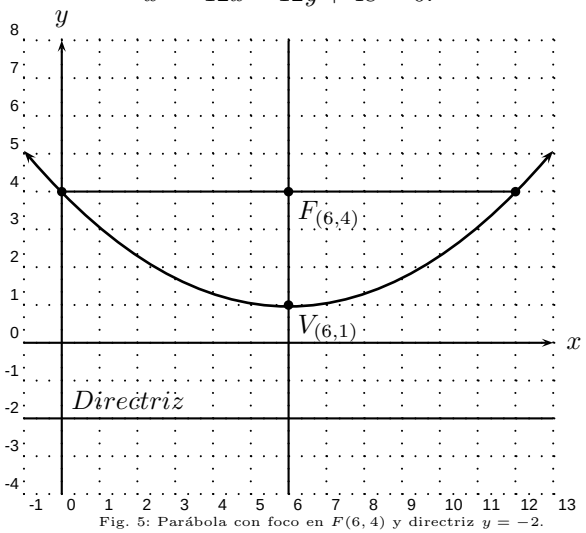

Fig. 5: Parábola con foco en $F(6,4)$ y directriz $y=-2$.

Problemas 2: Problemas generales

En los ejercicios del 1 al 10 reduzca la ecuación a la forna normal y encuentre las coordenadas de los puntos notables de la parábola. En cada caso trace la gráfica correspondiente.

1) $4y^2 - 48x - 20y = 71$.
2) $4x^2 + 48y + 12x = 159$.
3) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.
4) $y^2 + 4x = 7$.
5) $x^2 + 20y = 10$.
6) $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
7) $x = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - 2$.
8) $y = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{2}$.
9) $y^2 - 12x - 14y + 25 = 0$.
10) $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11 - 14, encontrar la ecuación general de la parábola, reducirla a su forma normal y trazar su correspondiente gráfica dejando indicados todos sus puntos notables.

11) Foco $F(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.
12) Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.
13) Vértice $(2, 0)$, Foco $(0, 0)$.
14) Foco $(-1, 1)$, directriz $x - 5 = 0$.
15) Hallar la ecuación normal y general de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$. Trazar la gráfica correspondiente.
16) Encontrar las ecuaciones correspondientes a la parábola cuyo vértice tiene coordenadas $(-3, 5)$, su eje es paralelo al eje X y pasa por el punto $A(5, 9)$. Representar graficamente la parábola.
17) Encontrar las ecuaciones presentar la gráfica de la parábola que tiene eje horizontal y pasa por los puntos $A(2, 1), B(6, 2)$ y $C(12, -1)$.
18) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $\left(\frac{3}{2}, -1\right), (0, 5)$ y $(-6, -7)$.

En los ejercicios del 19 al 25, determine si la ecuación dada describe una parábola, dos rectas, rectas coincidentes o ningún punto, de ser una parábola determine todos sus puntos notables y en cualquier caso presente la gráfica correspondiente.

19) $2x^2 - 3x + \frac{6}{5}$
20) $y^2 - 2y - 3 = 0$
21) $2y^2 + y = -2$
22) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
23) $x^2 = 0$
24) $y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
25) $y^2 + 12y - 3 = 0$

BIBLIOGRAFÍA

@Book, Autor = Charles H. Lehmann, Título = Geometría Analítica, Editorial = Limusa - Noriega Editores, Año = 1994,

@Book, Autor = Louis Leithold, Título = Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Editorial = Harla, Año = 1994,

@Book, Autor = Earl W. Swokowski, Título = Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Editorial = Grupo Editorial Iberoamérica, Edición = Segunda,